ДОВІДКОВІ МАТЕРІАЛИ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Алгебраїчні тотожності та правила

Арифметичні дії	Дії з дробами	Степені та корені
$a+0=a$	$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$	$a^0=1$
$a+b=b+a$	$\frac{1}{a}\pm\frac{1}{b}=\frac{b\pm a}{ab}$	$a^1=a$
$a-b=a+(-b)$	⊗ $\frac{1}{a}\pm\frac{1}{b}\neq\frac{1}{a\pm b}$	$a^2=a\cdot a$
$(a+b)+c=a+(b+c)$	$\frac{c}{a}\pm\frac{d}{b}=\frac{cb\pm ad}{ab}$	$a^3=a\cdot a\cdot a$
$-(a-b)=-a+b$	$\left(\frac{a\pm b}{c}\right)d=\frac{ad\pm bd}{c}$	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$
$a\cdot 1=a$	⊗ $\frac{a\pm bd}{cd}\neq\frac{a\pm b}{c}$	$a^m:a^n=a^{m-n}$
$a:1=a$	$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$	$(a^m)^n=a^{mn}$
$a\cdot 0=0$	$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}$	$(ab)^n=a^nb^n$
$a:0=\infty$	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	⊗ $(a+b)^n\neq a^n+b^n$
$ab=ba$	$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$
$(a+b)c=ac+bc$	$\frac{1}{a}:b=\frac{1}{ab}$	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$
$(ab)c=a(bc)$	$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=\frac{1}{a}\cdot\frac{b}{1}=\frac{b}{a}$	$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$	$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{a^2}=a$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$	$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

Арифметичні дії	Дії з дробами	Степені та корені
⊗ $(a+b)^2\neq a^2+b^2$	$\frac{1}{\frac{1}{a}\pm\frac{1}{b}}=\frac{ab}{b\pm a}$	⊗ $\sqrt{a\pm b}\neq\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$
		⊗ $\sqrt{a^2\pm b^2}\neq a\pm b$
$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$	$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}=\frac{a}{bc}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$	$a:b=\frac{a}{b}$	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

⊗ - *застереження щодо можливих помилок*

Перетворення виразів

Якщо, наприклад, є два вирази: $a=b\pm c$, $d=e\pm f$, то справедливо наступне:

(1) $a\pm d=(b\pm c)\pm(e\pm f)$

(2) $ad=(b\pm c)(e\pm f)$

(3) $a/d=(b\pm c)/(e\pm f)$

Основні поняття та правила щодо ***наближених обчислень***.

Абсолютною погрішністю наближеного значення називається модуль різниці точного й наближеного значень.

Відносною погрішністю наближеного значення називається відношення абсолютної погрішності до модуля наближеного значення.

Правильною цифрою наближеного значення називається цифра будь-якого розряду в тому випадку, коли абсолютна погрішність не перевищує одиницю цього розряду.

Значущими цифрами наближеного значення називаються його цифри, крім нулів ліворуч, а також усіх нулів праворуч, які стоять на місцях цифр, що були замінені при округленні.

Правила дій із наближеними значеннями.

- При додаванні й відніманні наближених значень результат необхідно округлити до стількох десяткових знаків, скільки їх має компонент із найменшим числом десяткових знаків.
- При множенні й діленні наближених значень результат необхідно округлити до стількох значущих цифр, скільки їх має компонент із найменшим числом значущих цифр.

Правила округлення дробів

- Якщо при округленні перша із цифр, що була замінена нулем, менша за 5, то остання значуща цифра не змінюється.

- Якщо при округленні перша із цифр, що була замінена нулем, більша або дорівнює 5, то до останньої значущої цифри додається 1.

Пропорцією *називається рівність двох відношень.*

Загальний вигляд пропорції: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Основна властивість пропорції: *якщо* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *то* $ad = bc$.

Інші властивості пропорції: *якщо* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

то $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$.

Наслідки: $a = \frac{cb}{d}$, $b = \frac{da}{c}$, $c = \frac{da}{b}$ *та* $d = \frac{cb}{a}$.

Якщо $a:b:c = x:y:z$, *то* $a = kx$; $b = ky$; $c = kz$,

де k — *коефіцієнт пропорційності.*

Відсоток — *це* $\frac{1}{100}$ *частина числа.*

Формула для розрахунку *складених відсотків* K на внески:

$$K = a(1 + 0{,}01\,r)^n,$$

де a - сума внеску; r - значення річних відсотків; n - кількість повних років.

Середнє арифметичне: $a = \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$.

Середнє геометричне: $b = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$

(за умови існування кореня *n-го* степеня).

Формули розкладання на множники

$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1})$

$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 та x_2 - корені рівняння

$ax^2 + bx + c = 0$

Формули скороченого множення

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$,

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

Арифметичним коренем k-го степеня з числа a ($a>0$) називається невід'ємне число b, k-й степінь якого дорівнює a, тобто $\sqrt[k]{a} = b$ та $a = b^k$.

Логарифмом числа x з основою a ($a>0$, $a \neq 1$) називається показник степеня b, до якого треба піднести число a, щоб дістати число x. Тобто якщо $log_a x = b$, то $a^b = x$.

Властивості логарифмів

$a^{\log_a x} = x$

$\log_a a = 1$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a b = 1/(\log_b a)$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_a x/y = \log_a x - \log_a y$

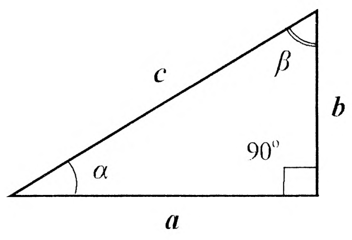
$\log_{a^k} x = (1/k) \log_a x$

$\log_a x = (\log_c x)/(\log_c a)$,

якщо $c > 0, c \neq 1$

$\log_b x = (\log_a x)/(\log_a b)$

Тригонометричні функції



$\sin\alpha = \frac{b}{c}$, $|\sin\alpha| \le 1$

$\cos\alpha = \frac{a}{c}$, $|\cos\alpha| \le 1$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{a}{b}$

Перетворення мір кутів

360° *(градусів)* **= 2π** *(радіан)*

$180° = \pi$, $90° = \pi/2$, ...

$x = 2\pi \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$, де x – радіани, $\alpha°$ – градуси.

Деякі константи

$\pi \approx 3{,}14$ $2\pi \approx 6{,}28$ $4\pi \approx 12{,}56$

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$ $\sqrt{3} \approx 1{,}73$

Значення тригонометричних функцій основних кутів

градуси	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°
радіани	**0**	**$\pi/6$**	**$\pi/4$**	**$\pi/3$**	**$\pi/2$**	**π**	**$3\pi/2$**
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	−1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	−1	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	–	0

Формули зведення

$sin(-\alpha) = -sin\alpha$

$cos(-\alpha) = cos\alpha$

$sin(\pi/2 \pm \alpha) = cos\alpha$

$cos(\pi/2 \pm \alpha) = \mp sin\alpha$

$sin(\pi \pm \alpha) = \mp sin\alpha$

$cos(\pi \pm \alpha) = -cos\alpha$

$cos(\pi-\alpha) = sin\alpha$

$cos\ (\alpha + 2\pi k) = cos\ \alpha$

$sin\ (\alpha + 2\pi k) = sin\ \alpha$

$tg\ (\alpha + \pi k) = tg\ \alpha$

$ctg\ (\alpha + \pi k) = ctg\ \alpha$

Формули складання тригонометричних функцій

$sin\ (\alpha + \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta$

$sin\ (\alpha - \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta$

$cos\ (\alpha + \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sin\ \alpha \cdot sin\beta$

$cos\ (\alpha - \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\ \alpha \cdot sin\beta$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Формули тригонометричних функцій подвійного аргумента

$sin\ 2\alpha = 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha$

$cos\ 2\alpha = cos^2\ \alpha - sin^2\ \alpha = 2\ cos^2\ \alpha - 1 = 1 - 2\ sin^2\ \alpha$

$sin\ 2\alpha = (2tg\alpha)/(1+tg^2\alpha)$

$tg\ 2\alpha = (2\ tg\alpha)/(1 - tg^2\ \alpha)$

$ctg\ 2\alpha = (ctg^2\ \alpha - 1)/2ctg\alpha$

Формули тригонометричних функцій половинного аргументу

$sin^2\ \alpha/2 = (1 - cos\ \alpha)/2$

$cos^2\ \alpha/2 = (1 + cos\alpha)/2$

$tg\ \alpha/2 = sin\alpha/(1 + cos\alpha) = (1-cos\ \alpha)/sin\ \alpha,$

де $\alpha \neq \pi + 2\pi\ n,\ n \in Z$

$sin\ \alpha/2 = \pm((1-cos\alpha)/2)^{1/2}$

$cos\ \alpha/2 = \pm((1+cos\alpha)/2)^{1/2}$

$tg\ \alpha/2 = \pm((1-cos\alpha)/(1+cos\alpha))^{1/2}$

$tg\ \alpha/2 = sin\alpha/(1+cos\alpha) = (1-cos\alpha)/sin\alpha$

$ctg\ \alpha/2 = \pm((1+cos\alpha)/(1-cos\alpha))^{1/2}$

$ctg\ \alpha/2 = sin\alpha/(1-cos\alpha) = (1+cos\alpha)/sin\alpha$

Формули перетворення суми тригонометричних функцій

$sin\ \alpha + sin\ \beta = 2\ sin\ ((\alpha+\beta)/2)\ cos\ ((\alpha-\beta)/2)$

$sin\ \alpha - sin\ \beta = 2\ cos\ ((\alpha+\beta)/2)\ sin\ ((\alpha-\beta)/2)$

$cos\ \alpha + cos\ \beta = 2cos\ (\alpha+\beta)/2\ cos\ (\alpha-\beta)/2$

$cos\ \alpha - cos\ \beta = -2sin\ (\alpha+\beta)/2\ sin\ (\alpha-\beta)/2$

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha cos\beta}$$

$$tg\alpha-tg\beta=\frac{sin(\alpha-\beta)}{cos\alpha cos\beta}$$

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій

$sin\ \alpha\ sin\ \beta = (cos\ (\alpha-\beta) - cos\ (\alpha+\beta))/2$

$cos\ \alpha\ cos\ \beta = (cos\ (\alpha-\beta) + cos\ (\alpha+\beta))/2$

$sin\ \alpha\ cos\ \beta = (sin\ (\alpha-\beta) + sin\ (\alpha+\beta))/2$

Співвідношення між тригонометричними функціями

$sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$

$$cos\alpha=\sqrt{1-sin^2\alpha}$$

$sin\ \alpha = (2\ tg\ \alpha/2)/(1+tg^2\alpha/2)$

$cos\ \alpha = (1-tg^2\ 2/\alpha)/(1+tg^2\ \alpha/2)$

$sin^2\ \alpha = 1/(1+ctg^2\ \alpha) = tg^2\ \alpha/(1+tg^2\ \alpha)$

$cos^2\ \alpha = 1/(1+tg^2\ \alpha) = ctg^2\ \alpha/(1+ctg^2\ \alpha)$

$1 + cos\ \alpha = 2\ cos^2\ \alpha/2$

$1 - cos\alpha = 2\ sin^2\ \alpha/2$

$1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$, де $\alpha \neq \pi(2n+1)/2$

$1 + ctg^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$, де $\alpha \neq \pi n$

$tg\alpha = (2\,tg(\alpha/2))/(1-tg^2(\alpha/2))$

Таблиця взаємозв'язку між тригонометричними функціями

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$
$\sin\alpha = a$	a	$\pm\sqrt{1-a^2}$	$\pm\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$
$\cos\alpha = a$	$\pm\sqrt{1-a^2}$	a	$\pm\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\pm\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$
$tg\,\alpha = a$	$\pm\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	a	$\dfrac{1}{a}$
$ctg\,\alpha = a$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\pm\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\dfrac{1}{a}$	a

Обернені тригонометричні функції

$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$, де $\alpha \in [-\pi/2;\ \pi/2]$

$\arccos(\cos\alpha) = \alpha$, де $\alpha \in [0;\ \pi]$

$arctg\,(tg\alpha) = \alpha$, де $\alpha \in [-\pi/2;\ \pi/2]$

$arcctg\,(ctg\alpha) = \alpha$, де $\alpha \in [0;\ \pi]$

$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha - 2\pi k$, де $\alpha \in [-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k]$

$\arcsin(\sin\alpha) = (2k+1)\pi - \alpha$, де $\alpha \in [\pi/2 + 2\pi k; 3\pi/2 + 2\pi k]$

$\arccos(\cos\alpha) = \alpha - 2\pi k$, де $\alpha \in [2\pi k; (2k+1)\pi]$

$\arccos(\cos\alpha) = 2\pi k - \alpha$, де $\alpha \in [(2k-1)\pi;\ 2\pi k]$

$arctg(tg\alpha) = \alpha - \pi k$, де $\alpha \in (-\pi/2 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$

$arcctg(ctg\alpha) = \alpha - \pi k$, де $\alpha \in (\pi k; (k+1)\pi)$

$\arcsin\alpha = -\arcsin(-\alpha) = \pi/2 - \arccos\alpha = arctg\,(\alpha/(1-\alpha^2)^{1/2})$

$\arccos\alpha = \pi - \arccos(-\alpha) = \pi/2 - \arcsin\alpha = arcctg(\alpha/(1-\alpha^2)^{1/2})$

$arctg\alpha = -arctg(-\alpha) = \pi/2 - arcctg\alpha = \arcsin(\alpha/(1+\alpha^2)^{1/2})$

$arcctg\alpha = \pi - arcctg(-\alpha) = \arccos(\alpha/(1+\alpha^2)^{1/2})$

$arctg\alpha = arcctg1/\alpha = \arcsin(\alpha/(1+\alpha^2)^{1/2}) = \arccos(1/(1+\alpha^2)^{1/2})$

$\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \pi/2$

$arcctg\,\alpha + arctg\,\alpha = \pi/2$

Алгебраїчні рівняння

Лінійне рівняння:

x – невідома ; a, b – сталі коефіцієнти,

$ax + b = 0$,

$x = -b/a$.

Квадратне рівняння:

$ax^2 + bx + c = 0$, $(a\neq 0)$

$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2-4ac})/2a$.

Якщо $(b^2-4ac) < 0$, то дійсних коренів нема.

Простіша система двох лінійних рівнянь з двома невідомими x,y

Якщо, наприклад, є два рівняння:

$ax + by + c = 0$,

$dy + e = 0$,

де a,b,c,d,e – сталі коефіцієнти, то виконуємо наступне:

(1) $x = \dfrac{-(by+c)}{a}$ (3) $x = \dfrac{-\left(b\left(\dfrac{-e}{d}\right)+c\right)}{a}$

(2) $y = \dfrac{-e}{d}$ (4) $x = \dfrac{be-cd}{ad}$

Дробово-раціональні рівняння - це рівняння виду $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Розв'язування можливе з умови: $f(x) = 0$ та $g(x)\neq 0$.

Ірраціональними називають рівняння, в яких невідоме міститься під знаком кореня, тобто рівняння виду $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$.

Для розв'язування використовують метод піднесення до степеня n обох частин рівняння, що призводить до рівняння виду $f(x) = [g(x)]^n$.

Логарифмічними називають рівняння, які містять невідоме під знаком логарифма, тобто рівняння виду $\log_a f(x) = g(x)$, де $a>0$ та $a\neq 1$. Якщо $g(x) = b$, то розв'язування зводиться до розв`язування рівняння $f(x) = a^b$.

Показниковими називають рівняння, в яких невідоме входить до показників степенів при сталих основах, тобто рівняння виду $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, де $a>0$, $a\neq 1$ та $b>0$, $b\neq 1$. Для розв'язування використовують логарифмування обох частин рівняння за однією основою, що призводить до рівняння виду $f(x)\log_c a = g(x)\log_c b$.

Тригонометричні рівняння

Якщо $\sin x = m$, $|m| \le 1$, то $x = (-1)^k \arcsin m + \pi k$, де $k \in Z$.

Якщо $\cos x = m$, $|m| \le 1$, то $x = \pm \arccos m + 2\pi k$, де $k \in Z$.

Якщо $tg\, x = m$, то $x = arctg\, m + \pi k$.

Якщо $ctg\, x = m$, то $x = arcctg\, m + \pi k$.

Для розв'язання простіших тригонометричних рівнянь використовуйте таблицю значень тригонометричних функцій основних кутів. *Наприклад*, якщо є рівняння: $\sin x = \sqrt{3}/2$, то $x = (-1)^k \arcsin \sqrt{3}/2 + \pi k = (-1)^k \pi/3 + \pi k$, що при $k=0$ дає $x = \pi/3$.

Числовою функцією називається така відповідність, при якій кожному числу з множини X зіставляється єдине число з множини R дійсних чисел.

Множину X називають ***областю визначення функції***.

Нехай f - функція з областю визначення X. Тоді змінну x, що приймає значення з множини X, називають ***аргументом даної функції***. Безліч чисел виду $f(x)$ для всіх x з X називають ***безліччю значень функції*** f.

Задати функцію означає вказати, по-перше, числову безліч X, тобто область визначення функції, і, по-друге, правило, за яким кожному числу з безлічі X відповідає єдине дійсне число. Найчастіше функції задають за допомогою формул, що вказують, як за даним значенням аргументу знайти відповідне значення функції.

Графіком функції f заданої на множині X, називають безліч таких точок координатної площини, які мають абсцис x і ординаті $f(x)$ для всіх x з безлічі X. Щоб побудувати графік функції, треба скласти таблицю деяких відповідних значень x і y, зобразити кожну пару знайдених значень точкою на координатної площини і поєднати отримані точки плавною лінією.

Перетворення графіків функцій

Правило 1. Графік функції $y = f(x) + n$ можна побудувати паралельним перенесенням графіка $y = f(x)$ уздовж осі Oy на n одиниць угору, якщо $n > 0$, або на $|n|$ вниз, якщо $n<0$.

Правило 2. Графік функції $y = f(x + m)$ можна побудувати паралельним перенесенням графіка $y = f(x)$ уздовж осі Ox на m одиниць уліво, якщо $m > 0$, або на $|m|$ вправо, якщо $m < 0$.

Правило 3. Графік функції $y = kf(x)$ можна побудувати з графіка $y = f(x)$ розтяганням його по осі ординат у $|k|$ разів, якщо $|k|>1$, або стисканням у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0<|k|<1$. Якщо $k<0$, то після розтягання його треба відобразити симетрично щодо осі Ox.

Правило 4. Графік функції $y = f(cx)$ можна побудувати з графіка $y = f(x)$ стисканням його по осі абсцис у $|c|$ разів, якщо $|c|>1$, або розтяганням у $\frac{1}{c}$ разів, якщо $0<|c|<1$. Якщо $c < 0$, то після стискання с його треба відобразити симетрично щодо осі Oy.

Правило 5. Графік функції $y = |f(x)|$ можна побудувати з графіка $y = f(x)$, якщо ту частину графіка, що розміщується нижче від осі Ox відобразити симетрично відносно осі Ox. Та частина графіка, що розміщується вище від осі Ox або на ній, залишається без змін.

Правило 6. Графік функції $y = f(|x|)$ можна побудувати з графіка $y = f(x)$, якщо ту частину графіка, що розміщується ліворуч від осі Oy забрати, а ту частину графіка, що розміщується праворуч від осі Oy або на ній, залишити без змін й відобразити її симетрично відносно осі Oy.

Арифметичною прогресією називається послідовність чисел, у якій заданий перший член a_1 , а кожний наступний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, доданому до одного і того самого числа d, що називається *різницею прогресії* $d = a_{n+1} - a_n$, де n – номер члена в послідовності.

Значення n-го члена арифметичної прогресії: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Сума n перших членів арифметичної прогресії:

$$S_a = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}.$$

Геометричною прогресією називається послідовність чисел, у якій заданий перший член $b \neq 0$, а кожний наступний член, починаючи із другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне і те саме число q, що називається *знаменником прогресії*, при цьому $q \neq 0$, $q \neq 1$. $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, де n – номер члена в послідовності.

Значення n-го члена геометричної прогресії: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Сума n перших членів геометричної прогресії:

$$S_b = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ З ЕЛЕМЕТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Завдання №1

Обчислити: $5^{-3}\cdot 25^2 + (0,7)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

Розв'язання:

$$5^{-3}\cdot 25^2 + (0,7)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{5^3}\cdot(5^2)^2 + 1\cdot\frac{1}{2^{-2}} = \frac{5^4}{5^3} + 1\cdot 2^2 = 5+4=9$$

Відповідь: 9.

Завдання №2

Скоротити дріб: $\frac{(2\boldsymbol{a}-6)\cdot(\boldsymbol{a}^2+6\boldsymbol{a}+9)}{(\boldsymbol{a}^2-9)\cdot(\boldsymbol{a}+3)}$

Розв'язання:

$$\frac{(2\boldsymbol{a}-6)\cdot(\boldsymbol{a}^2+6\boldsymbol{a}+9)}{(\boldsymbol{a}^2-9)\cdot(\boldsymbol{a}+3)} = \frac{2\cdot(\boldsymbol{a}-3)\cdot(\boldsymbol{a}+3)^2}{(\boldsymbol{a}-3)\cdot(\boldsymbol{a}+3)\cdot(\boldsymbol{a}+3)} = \frac{2\cdot(\boldsymbol{a}-3)\cdot(\boldsymbol{a}+3)^2}{(\boldsymbol{a}-3)\cdot(\boldsymbol{a}+3)^2} = 2$$

Відповідь: 2.

Завдання №3

Знайти суму трьох чисел, якщо відомо, що третє відноситься до першого як $\frac{4,5}{3,75}$ і становить 40% від другого, а сума першого та другого дорівнює 400.

Розв'язання:

Позначимо: x - перше число, y - друге число, z - третє число.

З умови задачі, складемо систему:

$$\begin{cases} \boldsymbol{z} = 0,4\boldsymbol{y} \\ \dfrac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{x}} = \dfrac{4,5}{3,75} \\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = 400 \end{cases}$$

Підставляємо z з першого рівняння у друге:

$$\begin{cases} z = 0{,}4y \\ \dfrac{0{,}4y}{x} = \dfrac{4{,}5}{3{,}75} \\ x + y = 400 \end{cases}$$

До другого рівняння застосовуємо основне правило пропорції:

$$\begin{cases} z = 0{,}4y \\ 0{,}4y \cdot 3{,}75 = 4{,}5 \cdot x \\ x + y = 400 \end{cases}$$

та виконуємо перетворення:

$$\begin{cases} z = 0{,}4y \\ y = 3x \\ x + y = 400 \end{cases}$$

Розв'язуємо систему методом підстановки:

$$\begin{cases} z = 0{,}4y \\ y = 3x \\ x + 3x = 400 \end{cases}$$

З третього рівняння отримуємо $x = 100$. Тоді $y = 300$, а $z = 0{,}4 \cdot 300 = 120$. Разом числа складають 100+300+120=520.

Відповідь: 520.

Завдання №4

Розв'язати рівняння $\dfrac{x+1}{2x-2} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{7-2x}{2x+2}$

Розв'язання:

Область допустимих значень: $\begin{cases} 2x - 2 \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ 2x + 2 \neq 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$

$$\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x}{x-1} - \frac{7-2x}{2x+2} = 0$$

Приводимо до спільного знаменника та отримаємо:

$$\frac{x^2 - 9x + 8}{2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = 0$$

Звідки $x^2 - 9x + 8 = 0$.

Дискримінант квадратного рівняння:

$$D = 81 - 32 = 49$$

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{49}}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{9 + \sqrt{49}}{2} = 8$$

Відповідь: 8.

Завдання №5

Сума трьох чисел, що складають арифметичну прогресію, дорівнює 111. Друге число більше першого в 5 разів. Знайти перше число.

Розв'язання:

Нехай a_1 - перше число, a_2 - друге число, a_3 - третє число. Використовуючи загальну формулу члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + d(n-1)$, де d - різність прогресії, та умову задачі, отримуємо систему:

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 111 \\ (a_1 + d) = 5a_1 \end{cases}$$

Після перетворення отримуємо систему:

$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = 111 \\ d = 4a_1 \end{cases}$$

Розв'язуємо систему та знаходимо: $a_1 = 7{,}4$.

Відповідь: 7,4.

Завдання №6

Розв'язати рівняння $\sqrt{1 + x \cdot \sqrt{x^2 - 24}} = x - 1$

Розв'язання:

Нехай $x - 1 \geq 0$, $x \geq 1$.

Підводимо обидві частини рівняння у другий ступінь, отримуємо рівняння, що рівносильне першому:

$$1 + x \cdot \sqrt{x^2 - 24} = x^2 - 2x + 1$$

або $$x \cdot \sqrt{x^2 - 24} = x^2 - 2x$$

Оскільки з попереднього аналізу $x \neq 0$, ділимо обидві частини рівняння на x:

$$\sqrt{x^2 - 24} = x - 2.$$

Нехай $x - 2 \geq 0$, $x \geq 2$.

Підводимо обидві частина рівняння у другий ступінь, отримуємо рівняння, що рівносильне попередньому:

$$x^2 - 24 = x^2 - 4x + 4 \quad \Rightarrow 4x = 28$$

Звідки $x = 7$.

Робимо перевірку чи відповідає цей розв'язок умові задачі.

Відповідь: 7.

Завдання №7

Знайти $x + y$, якщо $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ x - 8y = -15 \end{cases}$

Розв'язання:

Відніманням першого рівняння системи від другого, отримуємо рівняння:

$$11y = 22$$

Тоді $y = 2$, $x = 7 - 3y = 1$.

$$x + y = 3.$$

Відповідь: 3.

Завдання №8

Розв'язати рівняння $\sqrt{2^{x+1}} = \sqrt[4]{2^{x-2}}$

Розв'язання:

Область допустимих значень: x - довільне дійсне число.

Запишемо рівняння у вигляді :

$$\sqrt{2^3 \cdot 2^{x-2}} = \sqrt[4]{2^{x-2}}$$

Позначимо $2^{x-2} = y > 0$ (*),

отримаємо $\sqrt{2^3 \cdot y} = \sqrt[4]{y}$

Підведемо обидві частини рівняння в четвертий ступінь:

$$2^6 \cdot y^2 = y$$

Розв'язуємо це рівняння:

$$2^6 \cdot y^2 - y = 0,$$

$$y(2^6 \cdot y - 1) = 0$$

1) $y = 0$ не задовольняє умові (*).

2) $2^6 \cdot y - 1 = 0$

$$y = 2^{-6}$$

$$2^{x-2} = 2^{-6}$$

Прирівнюємо показники ступенів:

$$x - 2 = -6$$

$$x = -4$$

Відповідь: –4.

Завдання №9

Розв'язати рівняння $\lg x^2 - \lg\sqrt{x} = \lg 125$

Розв'язання:

Область допустимих значень: $x > 0$.

Використовуючи властивості логарифмів, отримуємо:

$$\lg\frac{x^2}{\sqrt{x}} = \lg 125$$

Потенцируючи рівняння, отримуємо:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}} = 125 \quad \text{або} \quad x^{3/2} = 5^3$$

Підводимо обидві частини в третій ступень, звідки маємо

$x^{1/2} = 5$, та $x = 25$

Відповідь: 25.

Завдання №10

Знайти $6\sqrt{5}\sin\alpha$, якщо $tg\alpha = 0{,}5$ і $0° < \alpha < 90°$.

Розв'язання:

$$\sin\alpha > 0, \quad \text{оскільки} \quad 0° < \alpha < 90°.$$

Скористуємося формулами:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + ctg^2\alpha \quad \text{та} \quad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}.$$

Отримуємо:

$$\sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

Тоді $\sin\alpha = \sqrt{\frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{0{,}25}{1{,}25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Відповідно

$$6\sqrt{5}\,\sin\alpha = 6\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = 6$$

Відповідь: 6.

Завдання №11

Знайти в градусах розв'язок рівняння

$\sin(x-30^\circ)\cos(2x) = \sin(x-30^\circ)$, якщо $200^\circ < x < 300^\circ$.

Розв'язання:

Запишемо рівняння у вигляді

$$\sin(x-30^\circ)\cos(2x) - \sin(x-30^\circ) = 0$$

або $$\sin(x-30^\circ)(\cos(2x)-1) = 0$$

Тоді

1) $$\sin(x-30^\circ) = 0$$
$$x - 30^\circ = 180^\circ\cdot n \qquad n\in Z$$
$$x = 30^\circ + 180^\circ\cdot n \qquad n \in Z$$

2) $$\cos(2x) = 1$$
$$2x = 360^\circ\cdot k \qquad k\in Z$$
$$x = 180^\circ\cdot k \qquad k \in Z$$

Таким чином, маємо розв'язок

$$x = 30^\circ + 180^\circ\cdot n,\quad x = 180^\circ\cdot k,$$

де $n, k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$

або в числах $x = 0^\circ, 30^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 360^\circ, 390^\circ\ldots$

та $x = -150^\circ, -180^\circ\ldots$

Умові задачі задовольняє лише $x = 210^\circ$.

Відповідь: 210°.

ПЕРЕЛІК НАВЧАЛЬНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Медична і біологічна фізика / За ред. О.В. Чалого, 2-е видання – К.: Книга-плюс, 2005.
2. Медична і біологічна фізика / За ред. О.В. Чалого. Т. 1 – К.: Віпол, 1999; Т. 2 – К.: Віпол, 2001.
3. Свердан П.Л. Вища математика: Аналіз інформації у математиці та медицині. – Львів: Світ, 1998.
4. Чалий О.В., Стучинська Н.В., Меленевська А.В. Вища математика. – К.: Техніка, 2001.